سوال ۱. توزیع بار زیر شامل یک خط بار افقی با طول محدود L، یک نیم‌حلقه با شعاع R و یک خط بار عمودی نیمه بی‌نهایت است. چگالی بار در واحد طول در همه بخش‌ها برابر با مقدار ثابت $+\lambda$ است.

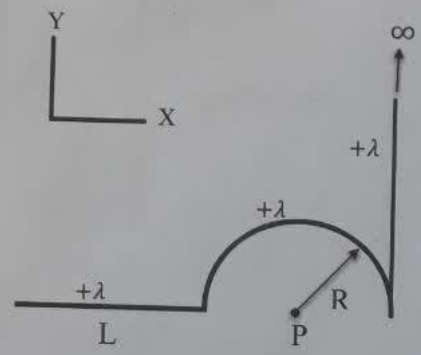
الف) میدان الکتریکی ناشی از خط بار افقی را در نقطه P بر حسب بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ محاسبه کنید.

ب) میدان الکتریکی ناشی از نیم‌حلقه را در نقطه P بر حسب بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ محاسبه کنید.

ج) میدان الکتریکی ناشی از خط بار عمودی را در نقطه P بر حسب بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ محاسبه کنید.

د) میدان الکتریکی برآیند در نقطه P را بر حسب بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ محاسبه کنید.

لازم به ذکر است که نقطه P در مرکز نیم‌حلقه قرار دارد.



میدان سیم محدود با طول L در نقطه P

الف

$$E_1 = \int_0^L \frac{k\,dq}{(L+R-x)^2} = \int_0^L \frac{k\lambda\,dx}{(L+R-x)^2} \quad (0.5)$$

$$u = L+R-x$$
$$du = -dx$$

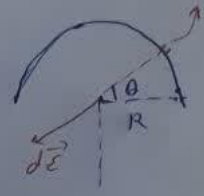
$$\Rightarrow E_1 = \int \frac{-k\lambda\,du}{u^2} = -k\lambda \frac{1}{-2+1} u^{-2+1} = k\lambda \frac{1}{L+R-x}\Big|_0^L = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{L+R}\right) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{L+R}\right)\vec{i}} \quad (0.5)$$

میدان سیم با طول L (2)

ب

مؤلفه در امتداد محورهای منفی باقی می‌ماند.

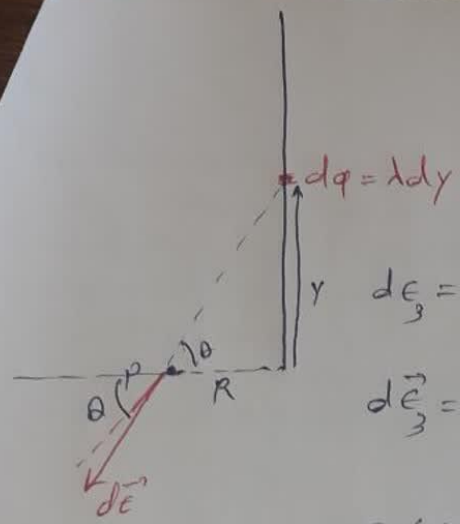


$$E_y = \int dE \sin(\theta) = \int \frac{k\,dq}{R^2}\sin(\theta) = \frac{k\lambda}{R}\int_0^{\pi} d\theta \sin(\theta) \quad (0.5)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(-\cos(\theta)\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{-2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (1) \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{j}} \quad (0.5)$$

میدان نیم حلقه (2)

2.



$$dE_3 = \frac{k\,dq}{(R^2+y^2)}$$

$$d\vec{E}_3 = \frac{k\,dq\cos(\theta)}{(R^2+y^2)}(-\vec{i}) + \frac{k\,dq\sin(\theta)}{(R^2+y^2)}(-\vec{j})$$

$$\cos(\theta) = \frac{R}{(R^2+y^2)^{1/2}} \qquad \sin(\theta) = \frac{y}{(R^2+y^2)^{1/2}}$$

0.5 0.5

$$\Rightarrow d\vec{E}_3 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{R\,dy}{(y^2+R^2)^{3/2}}(-\vec{i}) + \frac{y\,dy}{(y^2+R^2)^{3/2}}(-\vec{j})\right\}$$

برای مؤلفه x ها از تغییر متغیر $y = R\tan(\theta)$ استفاده می‌کنیم بنابراین

$$dy = R(1+\tan^2(\theta))d\theta$$

برای مؤلفه y ها از تغییر متغیر $u = R^2+y^2$ استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$du = 2y\,dy$$

$$\Rightarrow \vec{E}_3 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{R}\int\cos(\theta)d\theta\,(-\vec{i}) + \frac{1}{2}\int\frac{du}{u^{3/2}}(-\vec{j})\right\}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{R}\sin(\theta)(-\vec{i}) + \frac{1}{2}\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}\frac{1}{u^{1/2}}\right\}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{R}\frac{y}{(R^2+y^2)^{1/2}}\Big|_0^\infty(-\vec{i}) - \frac{1}{(R^2+y^2)^{1/2}}\Big|_0^\infty(-\vec{j})\right\}$$

1

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\left(\frac{1}{R}-0\right)(-\vec{i}) + \frac{1}{R}(-\vec{j})\right\} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(-\vec{i}-\vec{j})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_3 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(-\vec{i}-\vec{j})}$$

میدان در مبدأ بی‌نهایت

1

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{L+R}\right)(+\vec{i}) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}(-\vec{j})$$

$$- \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\vec{i} + \vec{j})$$

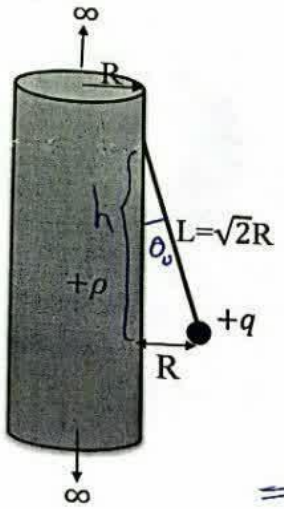
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left\{ \cancel{+\vec{i}} - \frac{R}{L+R}\vec{i} - 2\vec{j} \cancel{-\vec{i}} - \vec{j} \right\}$$

$$= \cancel{\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left\{ -\left(2 + \frac{R}{L+R}\right)\vec{i} - 3\vec{j} \right\}}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left\{ \frac{R}{R+L}\vec{i} + 3\vec{j} \right\}}$$ 1

کل سؤال ۱

سوال ۲. بار الکتریکی مثبت با چگالی حجمی $\rho = 10\ C/m^3$ در استوانه نارسانایی با شعاع $R = 10cm$ و طول بی‌نهایت به طور یکنواخت توزیع شده است. مطابق شکل بار نقطه‌ای به جرم $m = 0.01\ kg$ و بار $+q$ با استفاده از ریسمانی به طول $L = \sqrt{2}R$ در کنار استوانه آویزان شده است. اگر در حالت تعادل فاصله بار نقطه‌ای تا سطح استوانه برابر R باشد، مقدار بار q را حساب کنید.



حل: ابتدا میدان استوانه را در شعاع R حساب می‌کنیم

با استفاده از قانون گاوس:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{خالص}}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E\, dA$$

بار کل قرار گرفته در استوانه‌ای — سطح جانبی استوانه گوس

$$\Longrightarrow E\int dA = \frac{\rho \pi R^2 l}{\varepsilon_0}$$

$$E(2\pi r l) = \text{〃} \Longrightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

نمره میدان در $r>R$ (۳)

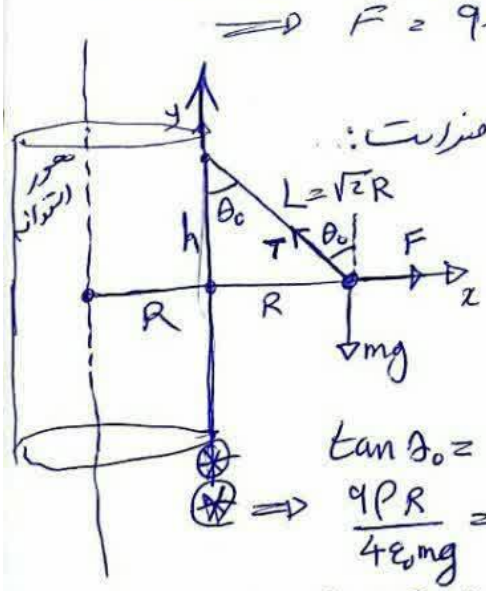
حال نیروی الکتریکی وارد بر بار q را حساب می‌کنیم

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\Longrightarrow F = q\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \quad r=2R \Longrightarrow F = \frac{q\rho R^2}{4\varepsilon_0 R} = \frac{q\rho R}{4\varepsilon_0} \ (*)$$

نمره (۱)

در حالت تعادل نیروی برآیند وارد بر q صفر است:



$$(*) \Longrightarrow T\sin\theta_0 = F = \frac{q\rho R}{4\varepsilon_0}$$

$$T\cos\theta_0 = mg \Longrightarrow \tan\theta_0 = \frac{q\rho R}{4\varepsilon_0 mg} \ (*)$$

نمره (۲)

با توجه به شکل داریم $\Longrightarrow h^2 + R^2 = L^2 = 2R^2$

$$\Longrightarrow h = R$$

$$\tan\theta_0 = \frac{R}{h} = \frac{R}{R} = 1$$

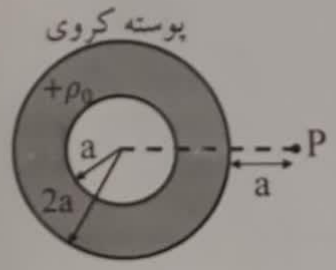
$$(*) \Longrightarrow \frac{q\rho R}{4\varepsilon_0 mg} = 1 \Longrightarrow q = \frac{4\varepsilon_0 mg}{\rho R}$$

$$q = \frac{4\times\varepsilon_0\times 0.01\times 10}{10\times 0.1} = 0.4\,\varepsilon_0 = 0.4\times 8.9\times 10^{-12}$$

$$= 3.56\times 10^{-12}\ C$$

نمره (۱)

سوال ۳. مطابق شکل روبرو، پوسته کروی نارسانا با چگالی بارحجمی $+\rho_0$ و شعاع داخلی a و شعاع خارجی 2a داریم.



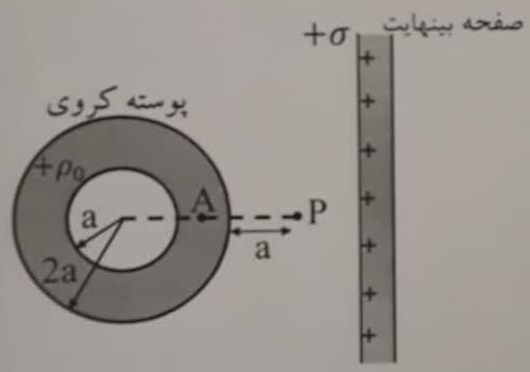
الف) میدان‌الکتریکی ناشی از پوسته کروی بار را در نقطه P (به فاصله 3a از مرکز پوسته باردار) به دست آورید.

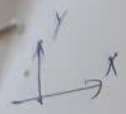
مطابق شکل پایین، یک صفحه نارسانای نامتناهی با چگالی سطحی $+\sigma$ عمود بر برگه، روبروی پوسته کروی قرار داده می‌شود.

ب) ابتدا میدان الکتریکی صفحه باردار را در نقطه P بیابید.

ج) چگالی سطحی σ صفحه باردار چقدر باشد (برحسب پارامترهای مسئله) تا میدان الکتریکی کل در نقطه P برابر صفر شود؟

د) اگر به جای پوسته کروی نارسانا، پوسته کروی رسانا قرار گیرد، میدان الکتریکی کل در نقطه A (نقطه A درون پوسته کروی و بین فاصله $a < r < 2a$ قرار دارد) چقدر است؟





الف)

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{n}\,dA = q/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi(2a)^3 - \frac{4}{3}\pi(a)^3\right)}{\varepsilon_0}$$

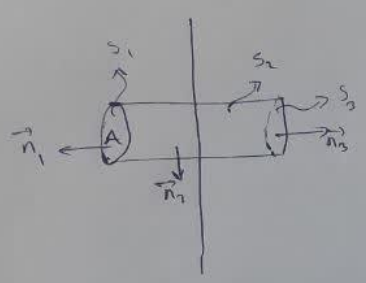
$$\Rightarrow E = \frac{7\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} \qquad r = 3a \Rightarrow E = \frac{7\rho a^3}{3\varepsilon_0(9a^2)} = \frac{7}{9}\frac{\rho a}{3\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{7}{27}\frac{\rho a}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{7}{27}\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\vec{i}$$

۲

ب)

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{n}\,d\vec{A} = q/\varepsilon_0$$



$$\Rightarrow \int_{S_1}\vec{E}\cdot\vec{n}_1\,dA + \int_{S_2}\vec{E}\cdot\vec{n}_2\,dA + \int_{S_3}\vec{E}\cdot\vec{n}_3\,dA$$

$$\vec{E}\cdot\vec{n}_1 = E \qquad \vec{E}\cdot\vec{n}_2 = E\cos(90) = 0$$

$$\vec{E}\cdot\vec{n}_3 = E$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\cdot\vec{n}\,dA = E\int_{S_1} dA + E\int_{S_3} dA = EA + EA = 2EA$$

۲

$$q = \sigma A \Rightarrow 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{i})$$

میدان در نقطه P ناشی از صفحه

$$\text{میدان کل } \vec{E} \text{ در نقطه } P = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)(-\vec{i}) + \frac{7}{27}\frac{\rho a}{\varepsilon_0}\vec{i} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{2} = \frac{7}{27}\rho a$$

ج)

$$\Rightarrow \sigma = \frac{14}{27}\rho a$$

۲

د) میدان در رسانا صفر است بنابراین میدان در نقطه A صفر است.

۱