

سؤال 1

درست

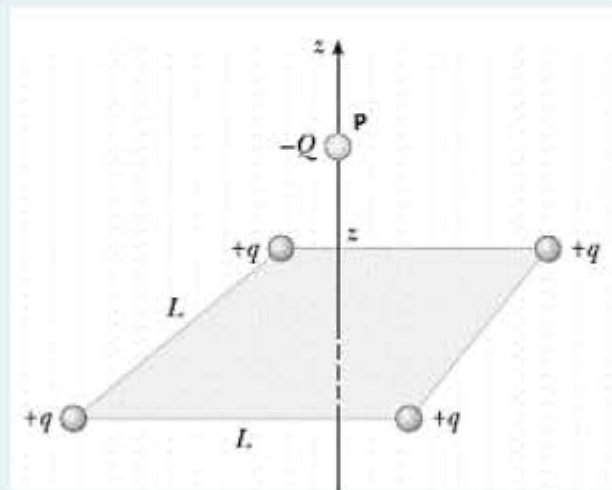
نمره 1.00 از 1.00

علامت زدن

سؤال

چهار ذره یکسان که هر کدام دارای بار $q = 10 \mu\text{C}$ هستند، در گوشه های مربع با طول $L = 4 \text{ cm}$ (برابر با چهار سانتی متر) ثابت شده اند. بار نقطه ای پنجم $-Q = 2 \mu\text{C}$ (در نقطه P) در فاصله ای در امتداد $z = 1 \text{ cm}$ روی خط عمود بر صفحه مربع و عبوری از مرکز مربع قرار گرفته است. نیروی اعمال شده توسط چهار بار دیگر را روی $-Q$ تعیین کنید (بر حسب نیوتن).

($k = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ را در نظر بگیرید)



90

:Answer

پاسخ:

از آنجا که اندازه و فاصله همه بارها برابر است:

$$|F_1| = |F_2| = |F_3| = |F_4| = k \frac{|qQ|}{r^2}$$

با در نظر گرفتن تقارن ، نیرو در جهت x و y صفر است و بنابراین جهت یکی از نیروها این است:

$$F_{1z} = k \frac{|qQ|}{r^2} \cos \theta (-\hat{k}) = -k \frac{|qQ|}{r^3} z \hat{k}$$

که ما از هندسه مسئله استفاده کرده ایم و $z/r = \cos \theta$. با تقارن

$$F_{1z} = F_{2z} = F_{3z} = F_{4z} = -k \frac{|qQ|}{r^3} z \hat{k}$$

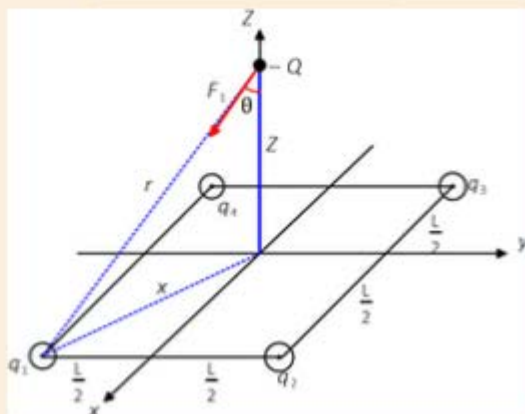
بنابراین

$$\vec{F}_z = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_{iz} = -4k \frac{qQ}{r^3} z \hat{k}$$

بر حسب پارامترهای مربع و با استفاده از قضیه فیثاغورث، داریم

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} L, \quad r = \sqrt{z^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} L\right)^2}$$

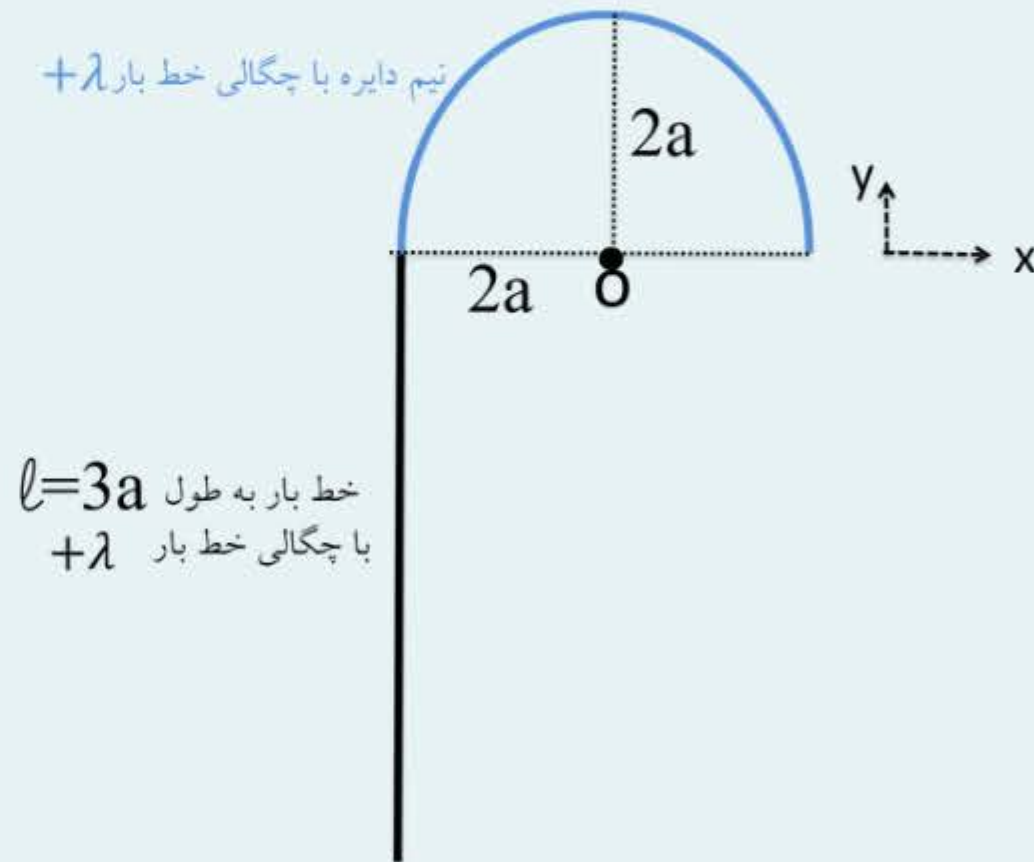
$$\vec{F}_z = -4k \frac{Qq}{\left(z^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} L\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} z \hat{k}$$



پاسخ درست: 10

مطابق شکل، یک خط بار به طول محدود l و چگالی خطی بار نشان داده شده در شکل، داریم که در کنار یک نیم حلقه ای باردار با چگالی خطی بار داده شده (نشان داده شده در شکل) قرار دارد.

مولفه های x و y میدان الکتریکی شکل داده شده (میدان برابند) در نقطه O را بنویسید. (جواب ها بر حسب λ و k (ثابت الکتروستاتیک) و a نوشته شوند)





$$\mathbf{E}_x = \frac{k\lambda}{2a} \frac{3}{\sqrt{13}} \vec{i}$$

$$\mathbf{E}_y = -\frac{k\lambda}{2a} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \vec{j}$$

$$\mathbf{E}_x = \frac{k\lambda}{2a} \frac{3}{\sqrt{13}} \vec{i}$$

$$\mathbf{E}_y = \frac{k\lambda}{2a} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \vec{j}$$

$$\mathbf{E}_x = \frac{k\lambda}{a} \frac{3}{\sqrt{13}} \vec{i}$$

$$\mathbf{E}_y = \frac{k\lambda}{a} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \vec{j}$$

$$\mathbf{E}_x = \frac{k\lambda}{2a} \frac{2}{\sqrt{13}} \vec{i}$$

$$\mathbf{E}_y = -\frac{k\lambda}{2a} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \vec{j}$$

$$\mathbf{E}_x = \frac{k\lambda}{a} \frac{3}{\sqrt{13}} \vec{i}$$

$$\mathbf{E}_y = -\frac{k\lambda}{a} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \vec{j}$$

برای آنکه برسی نیکی از سطح بار، در نقطه P₀

$R = r_a$
 $dq, dl = R d\theta = r_a d\theta$
 $\lambda = \frac{dq}{dl} \rightarrow dq = \lambda dl$
 $= \lambda r_a d\theta \equiv \lambda R d\theta$
 $dE = k \frac{dq}{r^2}$

به سمت تعادل که می آید،

$\vec{E} = 0, E_y = \int dE_y = \int dE \sin \theta = \int \frac{k dq}{r^2} \sin \theta$
 $= \frac{k}{r^2} \int \lambda R d\theta \sin \theta = \frac{k \lambda}{r^2} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{k \lambda}{r^2} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi}$
 $= \frac{2k \lambda}{r^2} \rightarrow \vec{E} = \frac{2k \lambda}{r_a} = \frac{k \lambda}{a} (-\hat{j})$

برای آنکه برسی نیکی از سطح بار، در نقطه P₀

$E_x = \int dE_x = \int dE \cos \theta = \int \frac{k dq}{r^2} \cos \theta$
 $\lambda = \frac{dq}{dy} \rightarrow dq = \lambda dy$
 $r \cos \theta = \frac{r_a}{r} \rightarrow r = \frac{r_a}{\cos \theta}$
 $r \sin \theta = \frac{y}{r_a} \rightarrow y = r_a \tan \theta$
 $dy = \frac{r_a}{\cos^2 \theta} d\theta$

$\rightarrow E_x = k \int \frac{\lambda dy}{r^2} \cos \theta = k \lambda \int \frac{r_a d\theta}{\cos^3 \theta} \cos \theta = \frac{k \lambda}{r_a} \int_0^{\theta_0} \cos \theta d\theta$
 $= \frac{k \lambda}{r_a} (\sin \theta) \Big|_0^{\theta_0} = \frac{k \lambda}{r_a} \sin \theta_0 = \frac{k \lambda}{r_a} \frac{r_a}{\sqrt{(r_a)^2 + (r_a \tan \theta_0)^2}} = \frac{k \lambda}{r_a \sqrt{1 + \tan^2 \theta_0}}$

$E_y = \int dE \sin \theta = \int \frac{k dq}{r^2} \sin \theta = \dots \frac{k \lambda}{r_a} \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta$
 $= \frac{k \lambda}{r_a} (-\cos \theta) \Big|_0^{\theta_0} = \frac{k \lambda}{r_a} (1 - \cos \theta_0) \equiv \frac{k \lambda}{r_a} \left[1 - \frac{r_a}{\sqrt{(r_a)^2 + (r_a \tan \theta_0)^2}} \right]$
 $= \frac{k \lambda}{r_a} \left[1 - \frac{r_a}{\sqrt{r_a^2}} \right] = \frac{k \lambda}{r_a} \left[1 - \frac{r}{\sqrt{r^2}} \right] \hat{j}$

برای آنکه در نقطه نیکی از سطح بار، در آن نقطه

$E_x = \frac{k \lambda}{r_a \sqrt{r^2}} \hat{i}$
 $E_y = \frac{k \lambda}{r_a} \left[1 - \frac{r}{\sqrt{r^2}} \right] - \frac{k \lambda}{a} \hat{j}$
 $= \left(-\frac{k \lambda}{r_a} - \frac{k \lambda}{r_a} \frac{r}{\sqrt{r^2}} \right) \hat{j} = \frac{k \lambda}{r_a} \left(1 + \frac{r}{\sqrt{r^2}} \right) (-\hat{j})$

پاسخ درست »

$$\mathbf{E}_x = \frac{k\lambda}{2a} \frac{3}{\sqrt{13}} \vec{i}$$

$$\mathbf{E}_y = -\frac{k\lambda}{2a} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \vec{j}$$

« است.

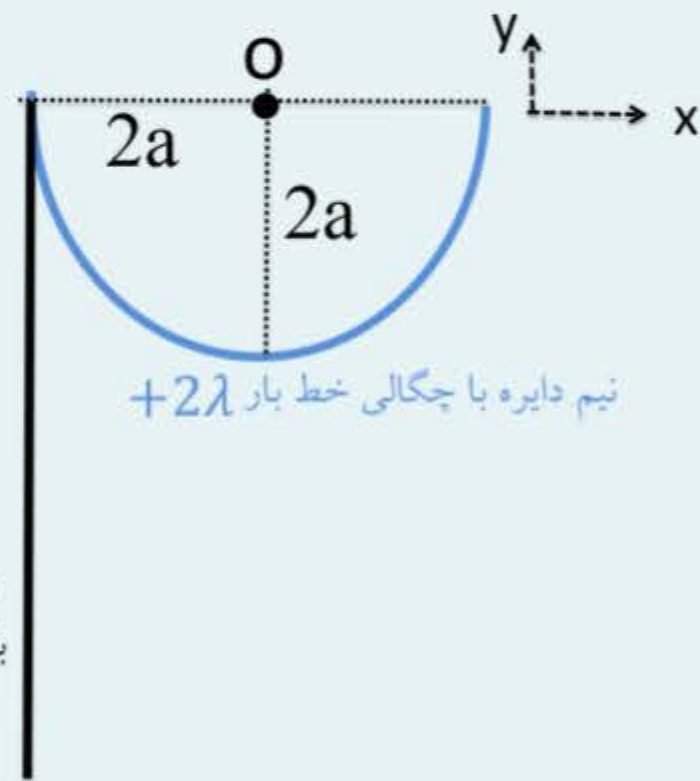
مطابق شکل، یک خط بار به طول محدود l و چگالی خطی بار نشان داده شده در شکل، داریم که در کنار یک نیم حلقه ای باردار با چگالی خطی بار داده شده (نشان داده شده در شکل) قرار دارد.

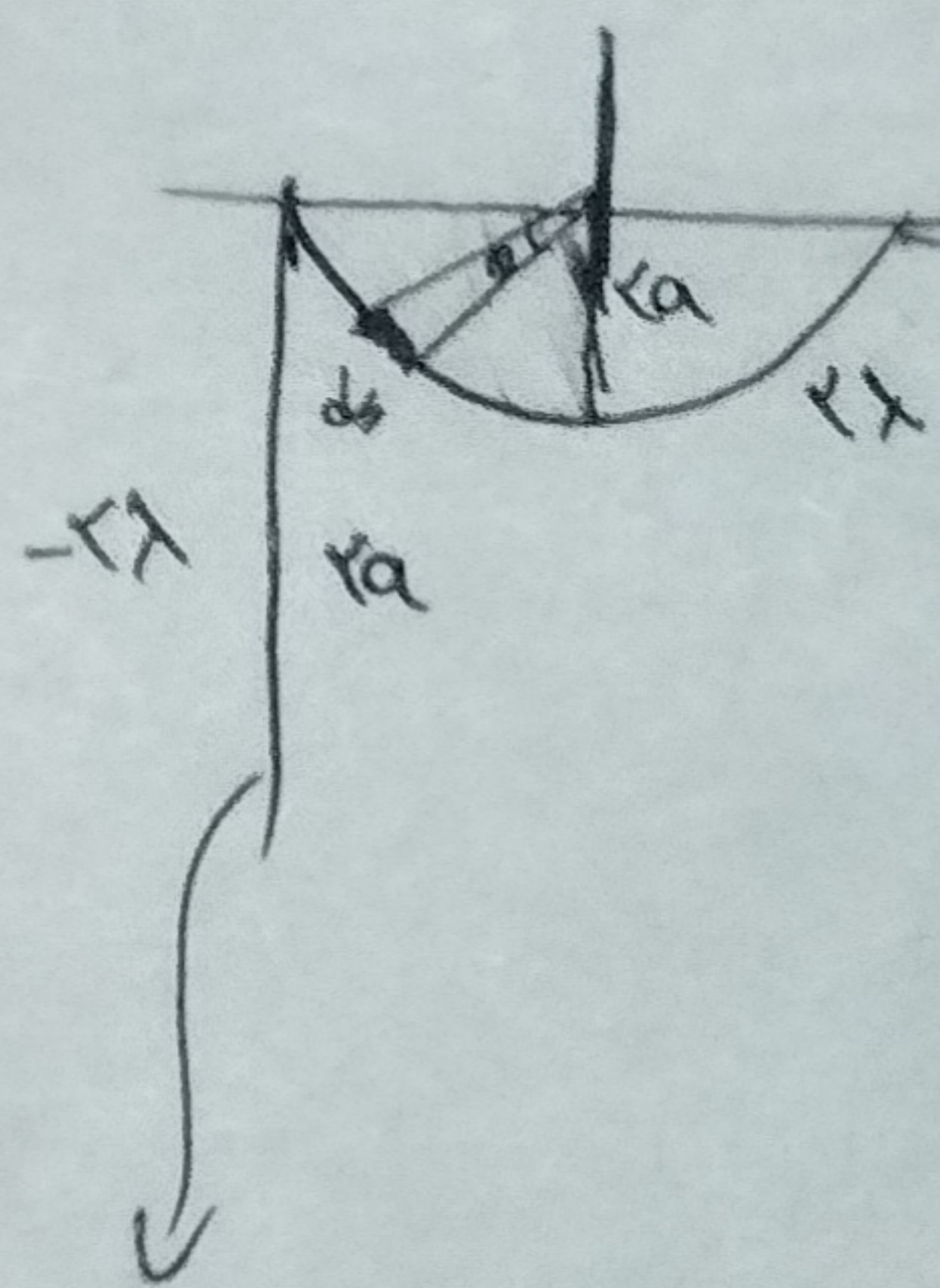
الف. مولفه های x و y میدان الکتریکی ناشی از خط بار به طول محدود را در نقطه O محاسبه کنید.

ب. اندازه و جهت میدان الکتریکی ناشی از نیم حلقه ی باردار را در نقطه O محاسبه کنید.

ج. مولفه های x و y میدان الکتریکی شکل داده شده (میدان برابند) در نقطه O را بنویسید.

(جواب ها بر حسب λ و k (ثابت الکتروستاتیک) و a نوشته شوند)





$$E = \int dE_y = \int dE \cos \theta = \int \frac{k\lambda r a d\theta}{\frac{r^3}{\epsilon_0}} \cos \theta = \frac{k\lambda}{\epsilon_0 a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{k\lambda}{\epsilon_0 a} \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{k\lambda}{\epsilon_0 a} \times 2 = \frac{2k\lambda}{a} \hat{j}$$

$$E = \int dE \cos \alpha = \int \frac{k\lambda dx}{\frac{r^3}{\epsilon_0}} \times \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{2k\lambda a}{\epsilon_0} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$x = a \tan u \rightarrow dx = \frac{a}{\cos^2 u} du \Rightarrow \frac{2k\lambda a}{\epsilon_0} \int \frac{\frac{a}{\cos^2 u}}{a^3 \frac{1}{\cos^3 u}} du = \frac{2k\lambda}{\epsilon_0 a} \int \cos u du$$

$$= \frac{2k\lambda}{\epsilon_0 a} \sin u$$

